

МИНОБРАЗОВАНИЯ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

И.о.заведующего кафедрой
уравнений в частных производных
и теории вероятностей



А.С. Рябенко

26.03.2025

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.О.19 Уравнения с частными производными

1. Код и наименование специальности: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика
2. Профиль специализации: Современные методы теории функций в математике и механике
3. Квалификация: Математик. Механик. Преподаватель
4. Форма обучения: Очная
5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей
6. Составители программы: Ткачева Светлана Анатольевна, канд. физ.-мат. наук, доцент
7. Рекомендована: Научно-методическим советом математического факультета
Протокол № 0500-03 от 18.03.25

9. Цели и задачи учебной дисциплины*Цели освоения учебной дисциплины:*

- изучение основ классификации уравнений с частными производными, приведение уравнений с частными производными к каноническому виду, изучение основ теории обобщенных функций для современного анализа решаемых задач.

Задачи учебной дисциплины:

- ознакомить с различными типами уравнений с частными производными;
- поставить и изучить основные классические задачи;
- изучить способы решений основных классических задач.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Уравнения с частными производными» относится к Блоку 1 Обязательной части, т.е. является обязательной дисциплиной для изучения обучающимися.

Для ее успешного освоения необходимы знания и умения, приобретенные в результате обучения по предшествующим дисциплинам: «Математический анализ», «Функциональный анализ», «Дифференциальные уравнения», «Комплексный анализ».

Студент должен свободно владеть математическим анализом, теорией функций комплексной переменной, обладать полными знаниями курса обыкновенных дифференциальных уравнений, знаниями теории интегралов Лебега, теории банаховых и гильбертовых пространств. Знание методов изучения решений начальных и начально-краевых задач для уравнений с частными производными является базовым при изучении математических моделей различных физических, химических, биологических, социальных процессов. Кроме того, уравнения с частными производными и задачи для них являются отдельным современным динамически развивающимся разделом математической науки.

Дисциплина является предшествующей для курсов «Численные методы», «Методы оптимизаций», «Универсальные математические пакеты» и специальных курсов, изучающих задачи математической физики.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики:	ОПК-1.1	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.	Знать: - актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики. Уметь: - использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности. Владеть: - навыками выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.
		ОПК-1.2	Умеет использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности.	
		ОПК-1.3	Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. — 7 / 252.

Форма промежуточной аттестации зачет – 5 семестр, экзамен – 6 семестр

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость		
		Всего	По семестрам	
			5 семестр	6 семестр
Контактная работа		136	68	68
в том числе:	лекции	70	34	34
	практические	70	34	34
	лабораторные	-	-	-
	курсовая работа	-	-	-
	контрольные работы	-	-	-
Самостоятельная работа		80	40	40
Форма промежуточной аттестации (зачет – 0 час./экзамен – <u>36</u> час)		36	-	36
Итого:		252	108	144

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
1. Лекции			
1.1	Постановка основных задач и классификация уравнений с частными производными	Классификация уравнений в частных производных второго порядка. Вывод основных уравнений математической физики, постановка граничных условий. Корректная постановка задач математической физики. Системы типа Ковалевской. Теорема Ковалевской.	Электронный университет, страница курса: https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1358
1.2	Введение в теорию обобщенных функций	Пространство основных функций D . Пространство обобщенных функций D' . Непрерывные операции в D и D' . Пространство основных функций S . Пространство обобщенных функций медленного роста S'	
1.3	Преобразование Фурье	Преобразование Фурье в S и S' . Его свойства.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1358
1.4	Фундаментальное решение	Фундаментальное решение. Фундаментальные решения для конкретных операторов в частных производных.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1358
1.5	Построение обобщенных решений с помощью свертки	Прямое произведение обобщенных функций и его свойства. Свертка обобщенных функций и ее свойства. Решение уравнений в частных производных с правой частью в обобщенных функциях.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1358

1.6	Уравнения гиперболического типа	Задача Коши для волнового оператора. Запаздывающие потенциалы. Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений. Интеграл энергии. Единственность решения. Непрерывная зависимость решений от начальных данных.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1358
1.7	Уравнения параболического типа	Задача Коши для оператора теплопроводности. Тепловые потенциалы. Первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности. Теорема о максимуме и минимуме. Следствие о единственности решения.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1358
18	Уравнения эллиптического типа	Гармонические функции. Основные свойства гармонических функций. Принцип максимума и минимума, теорема о среднем. Преобразования инверсии и Кельвина. Теоремы единственности решения краевых задач для уравнения Пуассона Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Свойства функции Грина. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре. Некоторые сведения о решениях краевых задач для уравнения Пуассона. Представления решений краевых задач для уравнения Пуассона через функции Грина соответствующих задач для уравнения Лапласа. Ньютоновы потенциалы. Теорема Рисса. Пространства $W^s(\Omega)$ и $W_0^s(\Omega)$. Обобщенные решения краевых задач для уравнения Пуассона в ограниченных областях.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1358
2. Практические занятия			
2.1	Постановка основных задач и классификация уравнений с частными производными	Классификация уравнений в частных производных второго порядка. Корректная постановка задач математической физики. Выполнение аттестационного задания №1	Электронный университет, страница курса: https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1358
2.2	Введение в теорию обобщенных функций	Пространство основных функций D . Пространство обобщенных функций D' . Непрерывные операции в D и D' . Пространство основных функций S . Пространство обобщенных функций медленного роста S' .	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1358
2.3	Преобразование Фурье	Преобразование Фурье в S и S' . Его свойства.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1358
2.4	Фундаментальное решение	Фундаментальное решение. Фундаментальные решения для конкретных операторов в частных производных. Выполнение аттестационного задания №2	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1358
2.5	Построение обобщенных решений с помощью свертки	Прямое произведение обобщенных функций и его свойства. Свертка обобщенных функций и ее свойства. Контрольная работа Решение уравнений в частных производных с правой частью в обобщенных функциях.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1358

2.6	Уравнения гиперболического типа	Задача Коши для волнового оператора. Запаздывающие потенциалы. Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений. Интеграл энергии. Единственность решения. Непрерывная зависимость решений от начальных данных.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1358
2.7	Уравнения параболического типа	Задача Коши для оператора теплопроводности. Тепловые потенциалы. Первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности. Теорема о максимуме и минимуме. Следствие о единственности решения. Выполнение аттестационного задания №3	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1358
2.8	Уравнения эллиптического типа	Гармонические функции. Основные свойства гармонических функций. Принцип максимума и минимума, теорема о среднем. Преобразования инверсии и Кельвина. Теоремы единственности решения краевых задач для уравнения Пуассона Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Свойства функции Грина. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре. Некоторые сведения о решениях краевых задач для уравнения Пуассона. Представления решений краевых задач для уравнения Пуассона через функции Грина соответствующих задач для уравнения Лапласа. Ньютоновы потенциалы. КВыполнение аттестационного задания №4	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1358

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Постановка основных задач и классификация уравнений с частными производными	12	8		2	22
2	Введение в теорию обобщенных функций	4	6		8	18
3	Преобразование Фурье.	4	6		10	20
4	Фундаментальное решение	4	4		10	18
5	Построение обобщенных решений с помощью свертки	10	10		10	30
6	Уравнения гиперболического типа	12	12		10	34
7	Уравнения параболического типа	8	8		14	30
8	Уравнения эллиптического типа	14	14		16	44
	Итого:	68	68		80	216

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся, на которую отводится 80 часов (по 40 часов в 5 и 6 семестрах).

Самостоятельная учебная деятельность студентов по дисциплине «Уравнения с частными производными» предполагает выполнение следующих заданий:

1) самостоятельное изучение учебных материалов по разделам 1-8 с использованием основной и дополнительной литературы, информационно-справочных и поисковых систем;

2) подготовку к текущим аттестациям: выполнение домашних заданий, самостоятельное освоение понятийного аппарата по каждой теме.

В первом семестре по теме 4 обучающиеся самостоятельно изучают раздел «Классификация уравнений в частных производных второго порядка» из темы «Постановка основных задач и классификация уравнений с частными производными», а также раздел «Фундаментальные решения для конкретных операторов в частных производных» из темы «Фундаментальное решение». Во втором семестре раздел «Представления решений краевых задач для уравнения Пуассона через функции Грина соответствующих задач для уравнения Лапласа. Ньютоновы потенциалы» в теме «Уравнения эллиптического типа». Студентам для организации самостоятельного изучения разделов предложены методические пособия:

1. Глушко А.В. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными. Постановка основных задач математической физики / А.В. Глушко, А.С. Рябенко. – Воронеж: ИД ВГУ, 2018. – 33 с.
2. Глушко А.В. Дифференциальные уравнения с частными производными гиперболического и параболического типов / А.В. Глушко, Е.А. Логинова, С.А. Ткачева. – Воронеж: ИД ВГУ, 2019. – 80 с.
3. Глушко А.В. Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка эллиптического типа / А.В. Глушко, Е.А. Логинова, Л.В. Безручкина. – Воронеж: ИД ВГУ, 2019. – 92 с.

Контроль самостоятельной работы в первом и втором семестрах осуществляется написанием аттестационных заданий по указанным темам (примеры аттестационных заданий см. ниже).

На лекциях рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

При изучении курса «Уравнения с частными производными» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекцией обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после чего приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникнут вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутственный час преподавателю.

3. Выбрать время для работы с литературой по дисциплине в библиотеке.

4. Содержание курса в системе «Электронный университет» (<https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1358>), включает весь лекционный материал курса «Уравнения с частными производными», практическая часть курса содержит примеры

решенных задач, задачи для самостоятельной работы. Там же имеются программы всех трех коллоквиумов по курсу, программа экзамена.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
01	Сабитов К.Б. Уравнения математической физики / К.Б. Сабитов. – М.: Физматлит, 2013. – 352 с. // «Университетская библиотека online»: электронно-библиотечная система. – URL: http://biblioclub.ru

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
02	Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики / В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, Т. В. Михайлова, М. И. Шабунин. – М.: Физматлит, 2016. – 518 с. URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=485543
03	Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет):

№ п/п	Ресурс
1	http://egworld.ipmnet.ru – интернет-портал, посвященный уравнениям и методам их решений
2	http://www.lib.vsu.ru - электронный каталог ЗНБ ВГУ
3	ЭБС «Университетская библиотека онлайн»
4	Электронный курс https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1358 .

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы:

№ п/п	Источник
1	Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики / В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, Т. В. Михайлова, М. И. Шабунин. – М.: Физматлит, 2016. – 518 с. URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=485543
3	Глушко А.В. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными. Постановка основных задач математической физики / А.В. Глушко, А.С. Рябенко. – Воронеж: ИД ВГУ, 2018. – 33 с.
4	Глушко А.В. Практические занятия по классификации дифференциальных уравнений с частными производными / А.В. Глушко, А.С. Рябенко. – Воронеж: ИД ВГУ, 2018. – 38 с.
5	Глушко А.В. Дифференциальные уравнения с частными производными гиперболического и параболического типов / А.В. Глушко, Е.А. Логинова, С.А. Ткачева. – Воронеж: ИД ВГУ, 2019. – 80 с.
6	Глушко А.В. Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка эллиптического типа / А.В. Глушко, Е.А. Логинова, Л.В. Безручкина. – Воронеж: ИД ВГУ, 2019. – 92 с.
7	Положение об организации самостоятельной работы обучающихся в Воронежском государственном университете

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

При реализации дисциплины используются следующие образовательные технологии: логическое построение дисциплины, установление межпредметных связей,

обозначение теоретического и практического компонентов в учебном материале, актуализация личного и учебно-профессионального опыта обучающихся, включение элементов дистанционных образовательных технологий.

В практической части курса используется стандартное современное программное обеспечение персонального компьютера.

В части освоения материала лекционных и лабораторных занятий, самостоятельной работы по отдельным разделам дисциплины, прохождения текущей и промежуточной аттестации может применяться электронное обучение и дистанционные образовательные технологии, в частности, электронный курс (URL: (<https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1358>) на портале «Электронный университет ВГУ».

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины: Для проведения лекционных и практических занятий используются аудитории, соответствующие действующим санитарно-техническим нормам и противопожарным правилам.

Для самостоятельной работы используется класс с компьютерной техникой, оснащенный необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть. При реализации дисциплины с использованием дистанционного образования возможны дополнения материально-технического обеспечения дисциплины

19. Оценочные средства для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Постановка основных задач и классификация уравнений с частными производными	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ Комплект заданий для аттестационной работы № 1
2	Введение в теорию обобщенных функций	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ Комплект заданий для аттестационной работы № 2
3	Преобразование Фурье	ОПК-1	ОПК-1.2, ОПК-1.3	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ Комплект заданий для аттестационной работы № 2
4	Фундаментальное решение	ОПК-1	ОПК-1.2	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ Комплект заданий для аттестационной работы № 2
5	Построение обобщенных решений с помощью свертки	ОПК-1	ОПК-1.1	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ Комплект заданий для аттестационной работы № 2
Промежуточная аттестация Форма контроля - Зачет				КИМ (зачет), КИМ Комплект заданий для контрольных работ № 1,2
6	Уравнения гиперболического типа	ОПК-1	ОПК-1.2, ОПК-1.3	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ Комплект заданий для аттестационной работы №3
7	Уравнения параболического типа	ОПК-1	ОПК-1.2, ОПК-1.3	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ Комплект заданий для аттестационной работы № 4
8	Уравнения эллиптического типа	ОПК-1	ОПК-1.2, ОПК-1.3	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ Комплект заданий для аттестационной работы № 4
Промежуточная аттестация Форма контроля - экзамен				КИМ (экзамен), КИМ Комплект заданий для аттестационных работ № 3,4

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Домашние задания:

По теме 1. Постановка основных задач и классификация уравнений с частными производными

Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.

Задания №№ 56.4; 56.5; 56.6; 57.4; 57.5; 57.6; 58.2; 58.3; 58.4

По теме 2. Введение в теорию обобщенных функций

Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.

Задания №№ 63.4; 63.5; 63.6; 64.2; 64.3; 64.4; 65.4; 65.5; 65.7; 65.8; 66.3; 66.4; 66.6; 66.7; 66.8; 67.2; 67.3; 67.4; 67.5; 67.6; 67.8; 67.9

По теме 3 Преобразование Фурье

Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.

Задания №№ 75.4; 75.5; 75.6; 75.7; 75.8; 75.9; 76.2; 76.3; 76.5; 76.6; 76.7

По теме 4. Фундаментальное решение

Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.

Задания №№ 77.2; 78.2; 78.3; 78.4; 78.5; 78.6; 78.7

По теме 5. Построение обобщенных решение с помощью свертки

Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.

Задания №№ 71.3; 71.6; 71.7; 71.8

По теме 6. Уравнения гиперболического типа

Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.

Задания №№ 79.2; 79.3; 79.6; 79.7; 79.8; 79.9; 79.10; 79.11; 79.12; 80.4; 80.5; 80.6; 81.2; 81.4; 81.6; 81.7; 81.8

По теме 7. Уравнения параболического типа

Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.

Задания №№ 82.1; 82.4; 82.6; 82.7; 82.8; 83.1; 83.2; 83.4; 83.5; 83.6; 83.7; 84.2; 84.3; 84.4

По теме 8. Уравнения эллиптического типа

Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.

Задания №№ 85.1; 85.3; 85.4; 85.5; 85.6; 86.2; 86.3; 86.4

Перечень вопросов к зачету: оценка знаний при проведении зачета ведется с учетом результата работы в ходе семестра, результатом выполнения аттестационных работ №1,2 и сдачи первого коллоквиума.

Примерный перечень задач для аттестационных работ:

№1

1. Определить тип дифференциального уравнения

$$2\sqrt{3}\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x\partial y} + 2\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x\partial z} + 2\sqrt{3}\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y\partial z} + u(x,y,z) = 0.$$

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} + u(\xi, \eta) = 0.$$

3. Привести к каноническому виду дифференциальное уравнение

$$x^2 \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, (x > 0, y > 0).$$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

№2

1. Используя формулу, связывающую обычную и обобщенную производные, вычислить обобщенную производную от $\operatorname{sgn}(x^2 - 1)$.

2. Используя формулу Лейбница вычислить обобщенную производную от функции

$$y(x) = \begin{cases} \sin x, & x < -1; \\ 1, & -1 \leq x \leq 1; \\ \cos x, & x > 1. \end{cases}$$

3. Пусть $\varphi(x) \in S(\mathbb{R})$. Выяснить, сходится ли последовательность $\frac{1}{k} \varphi\left(\frac{x}{k}\right)$ в $S(\mathbb{R})$.

4. Пусть $L(x, D_x)$ – линейный дифференциальный оператор. Функция $E(x) \in S'(\mathbb{R}^n)$ называется фундаментальным решением дифференциального оператора $L(x, D_x)$ если

а) $L(x, D_x)E(x) = 1$, б) $L(x, D_x)E(x) = \delta(x)$, в) $L(x, D_x)E(x) = E(x)$.

№3

Классическая задача Коши для волнового уравнения выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - a^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_i^2} = f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} & \text{б)} \quad \begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - a^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_i^2} = f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \\ \text{в)} \quad & \begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - a^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_i^2} = f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} & \text{г)} \quad \begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - a^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_i^2} = f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \end{aligned}$$

2. Построение фундаментального решения для обыкновенного дифференциального оператора. Примеры.

3. Пусть $f(x) \in S(\mathbb{R}^n)$, тогда преобразование Фурье функции $f(x)$ ($F_{x \rightarrow \xi}[f(x)]$) задается формулой

$$\text{а)} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cos(x\xi) dx, \text{ б)} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \sin(x\xi) dx, \text{ в)} \int_{\mathbb{R}^n} f(x\xi) dx, \text{ г)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(x) dx, \text{ д)} \int_{\mathbb{R}^n} ix f(x) dx.$$

№4

1. Решить следующую задачу Коши для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \sin x, (x \in \mathbb{R}, t > 0),$$

$$u(x,t)|_{t=0} = \sin x, \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0.$$

2. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + 3t^2, \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0),$$

$$u(x,t)|_{t=0} = \sin x.$$

3. Построение функции Грина для уравнения Лапласа

Примерный перечень вопросов

Часть 1

1	Классификация уравнений второго порядка в точке, их приведение к каноническому виду.
2	Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. Классификация, замена переменных, формулы связи между коэффициентами.
3	Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. Гиперболический тип уравнения.
4	Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. Эллиптический и параболический типы уравнений.
5	Постановка начальных, краевых и начально-краевых задач для уравнений в частных производных.
6	Вывод уравнения Даламбера (волновое уравнение). Поперечные колебания струны. Граничные условия для струны.
7	Вывод уравнения Даламбера (волновое уравнение). Продольные колебания упругого стержня. Граничные условия для стержня.
8	Вывод уравнения распространения тепла в изотропном твердом теле. Условия на границе. Стационарное уравнение.
9	Корректная постановка задач математической физики. Пример Адамара.
10	Определение системы типа Ковалевской. Примеры. Постановка задачи Коши для системы типа Ковалевской. Определение аналитической функции многих действительных переменных. Формулировка теоремы Ковалевской (без доказательства).
11	Пример Ковалевской.
12	Пространство основных функций D .
13	Непрерывные операции в D .
14	Пространство обобщенных функций D' . Пример функционала из D' .
15	Носитель и нулевое множество обобщенной функции. δ – функция Дирака. δ – функция Дирака как предел последовательности основных функций.
16	Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Лемма дю-Буа-Реймонда. Доказательство сингулярности δ – функции Дирака.
17	Формулы Сохоцкого.
18	Непрерывные операции в D' . Операция дифференцирования (с примером). Линейная замена переменных.
19	Непрерывные операции в D' . Умножение на бесконечно дифференцируемую функцию (с двумя примерами).
20	Обобщенные производные по Соболеву. Пример на вычисление обобщенной производной кусочно-дифференцируемой функции.
21	Свойства обобщенных производных: линейность, непрерывность, бесконечная дифференцируемость, независимость от порядка дифференцирования, формула Лейбница дифференцирования произведения, нерастекание носителя при обобщенном дифференцировании.
22	Прямое произведение обобщенных функций. Техническая лемма, первое утверждение.
23	Прямое произведение обобщенных функций. Техническая лемма, второе утверждение. Доказательство принадлежности $f(x)g(y) \in D'(\mathbb{R}^{n+m})$.
24	Коммутативность прямого произведения. Лемма о плотности.
25	Остальные свойства прямого произведения.
26	Понятие свертки. Два примера существования свертки обычных функций.

27	Свертка обобщенных функций. Определение.
28	Свойства свертки: линейность, коммутативность, дифференцируемость. Пример несуществования свертки обобщенных функций.
29	Свертка с финитным функционалом.

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

Цель текущего контроля:

Определение уровня сформированности профессиональных компетенций, знаний и навыков деятельности в области знаний, излагаемых в курсе.

Задачи текущего контроля: провести оценивание

1. уровня освоения теоретических и практических понятий, научных основ профессиональной деятельности;

2. степени готовности обучающегося применять теоретические и практические знания и профессионально значимую информацию, сформированности когнитивных умений.

3. приобретенных умений, профессионально значимых для профессиональной деятельности.

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучаемых и совершенствования методики освоения новых знаний. Он обеспечивается проведением контрольной работы и проведением коллоквиумов.

В ходе аттестационной работы обучающемуся выдается КИМ с практическим перечнем из четырех заданий и предлагается решить данные задания. В ходе выполнения заданий можно пользоваться любой литературой, ограничение по времени 90 минут.

В ходе проведения коллоквиумов (№ 1 – 5 семестр, части № 2 - № 3 6 семестр) обучающемуся выдается программа коллоквиума, бланк ответа и билет с заданием. Ответ на вопрос КИМ должен быть дан за 60 минут.

Если текущая аттестация проводится в дистанционном формате, то обучающийся должен иметь компьютер и доступ в систему «Электронный университет». Если у обучающегося отсутствует необходимое оборудование или доступ в систему, то он обязан сообщить преподавателю об этом за 2 рабочих дня. На контрольную работу в дистанционном режиме отводится ограничение по времени 240 минут.

20.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины. Промежуточная аттестация по дисциплине «Уравнения с частными производными» проводится в форме зачета и экзамена.

При промежуточной аттестации 5 семестра уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками **«зачтено»** и **«незачтено»**, которые формируются следующим образом:

Аттестационная работа №1,2 – по баллу за каждую правильно решенную из 1-3 задания и 2 балла за задание №4. При получении не менее 3 баллов выставляется оценка «зачтено».

Коллоквиум № 1 – 5 баллов за полный ответ по вопросу КИМ. Баллы от 0 до 5 выставляются по критериям оценивание компетенций из п. 19.2 (0 – 2 балла по критериям оценивания на «неудовлетворительно», 3 балла – «удовлетворительно», 4 балла – «хорошо», 5 баллов – «отлично»). Возможно назначение баллов с точностью до десятых. При получении не менее 50% баллов (от 2,5 и выше) выставляется оценка «зачтено». Оценка в баллах сохраняется для дальнейшего использования при формировании оценки в 6 семестре.

Критерии оценивания компетенций	Шкала оценок
«Зачтено» выставляется студенту, который прочно усвоил предусмотренный программный материал; правильно, аргументировано ответил на все вопросы, с приведением примеров; показал глубокие систематизированные знания, владеет приемами рассуждения и сопоставляет материал из разных источников: теорию связывает с практикой, другими темами данного курса, других изучаемых предметов; без ошибок выполнил практическое задание. Обязательным условием выставленной оценки является правильное решение предложенных примеров (60%) Дополнительным условием получения оценки «зачтено» могут стать хорошие успехи при выполнении самостоятельной и контрольной работы, систематическая активная работа на лекционных и практических занятиях.	«зачтено»
«Не зачтено» Выставляется студенту, который не справился с 50% вопросов и заданий билета, в ответах на другие вопросы допустил существенные ошибки. Не может ответить на дополнительные вопросы, предложенные преподавателем.	«Не зачтено»

Промежуточная аттестация 6 семестра по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Перечень теоретических вопросов:

Часть 2

1	Пространство основных функций S . Сходимость в S . Вложение D в S .
2	Непрерывные операции в S .
3	Пространство обобщенных функций медленного роста S' . Сходимость в S' . Вложение S' в D' .
4	Непрерывные операции в S' .
5	Теорема Л.Шварца. Пример обобщенной функции медленного роста.
6	Финитный функционал из D' . Плотность D в S . Включение D'_0 в S' .
7	Преобразование Фурье на S . Теорема о взаимно однозначном отображении преобразованием Фурье пространства S на себя. Следствие.
8	Преобразование Фурье на пространстве S' .
9	Свойства преобразования Фурье на S' . Пример. Частичное преобразование Фурье.
10	Преобразование Фурье финитного функционала.
11	Преобразование Фурье свертки.
12	Обобщенные решения уравнений в частных производных. Фундаментальное решение. Лемма о фундаментальном решении. Теорема Хёрмандера (без доказательства).
13	Построение фундаментального решения для обыкновенного дифференциального оператора. Два примера.
14	Фундаментальное решение для оператора теплопроводности.
15	Фундаментальное решение для волнового оператора при $n=3$.
16	Фундаментальное решение для оператора Лапласа при $n=3$.
17	Задача Коши для волнового уравнения. Сведение классической задачи Коши для волнового уравнения к обобщенной задаче Коши.
18	Носитель фундаментального решения волнового оператора (при $n=3$). Дополнительная теорема о свертке. Два следствия.
19	Решение обобщенной задачи Коши для волнового оператора. Теорема и следствие.
20	Объемный запаздывающий потенциал. Лемма и теорема.
21	Поверхностный запаздывающий потенциал простого слоя. Лемма и теорема.
22	Поверхностный запаздывающий потенциал двойного слоя. Решение задачи Коши для волнового уравнения. Формула Кирхгофа.

23	Решение классической задачи Коши для волновых уравнений при $n = 1, 2$.
24	Распространение волн. Принцип Гюйгенса.
25	Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений. Интеграл энергии. Единственность решения.
26	Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений. Непрерывная зависимость решения начально-краевой задачи от начальных данных.
27	Постановка классической задачи Коши для уравнения теплопроводности.
28	Сведение классической задачи Коши для уравнения теплопроводности к обобщенной задаче Коши.
29	Объемный тепловой потенциал. Лемма о существовании объемного теплового потенциала.
30	Объемный тепловой потенциал. Теорема об объемном тепловом потенциале.
31	Поверхностный тепловой потенциал. Лемма о существовании поверхностного теплового потенциала.
32	Поверхностный тепловой потенциал. Теорема о поверхностном тепловом потенциале.
33	Теорема о существовании решения классической задачи Коши для уравнения теплопроводности.
34	Первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности. Теорема о максимуме и минимуме. Следствия.

Часть 3

1	Гармонические функции. Лемма 1.
2	Формулы Грина. Лемма 2 об интегральном представлении функции с помощью фундаментального решения оператора Лапласа.
3	Основные свойства гармонических функций
4	Утверждение 2 о бесконечной дифференцируемости гармонической функции.
5	Теорема 1 о среднем арифметическом гармонической функции
6	Теорема 2 о максимуме и минимуме гармонической функции.
7	Преобразования инверсии и Кельвина. Лемма 4 об устранимой особенности. Теорема 3 о поведении гармонической функции на бесконечности.
8	Теоремы единственности решений внутренней и внешней задач Дирихле для уравнения Лапласа.
9	Теорема 5 о разрешимости внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа.
10	Теорема 6 о единственности решения внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа.
11	Функция Грина задачи Дирихле.
12	Свойства функции Грина.
13	Построение функции Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.

Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины. Промежуточная аттестация по дисциплине «Уравнения с частными производными» проводится в форме зачета и экзамена.

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в конце семестра. Результаты текущей аттестации обучающегося по решению кафедры могут быть учтены при проведении промежуточной аттестации. При несогласии студента, ему дается возможность пройти промежуточную аттестацию (без учета его текущих аттестаций) на общих основаниях.

При проведении зачета учитываются результаты двух аттестационных работ и результаты первого коллоквиума. Для получения оценки «зачтено» на зачете в конце 5 семестра у обучающегося должны иметься или оценки «зачтено» по аттестационным работам и коллоквиуму № 1 или студент должен ответить на соответствующие вопросы в ходе проведения зачета.

При проведении экзамена учитываются результаты трех коллоквиумов и учитывается выставленная преподавателем оценка за работу в ходе практических занятий.

Если у обучающегося есть положительные оценки по трем коллоквиумам и положительная оценка работы в ходе обучения по практике, то оценка по экзамену

выставляется как среднее арифметическое данных четырех оценок с округление десятых долей по математическим правилам. Если обучающийся не имеет положительной оценки по какому-либо коллоквиуму или практике, или не согласен с этой оценкой, он может ответить на соответствующие вопросы в ходе экзамена.

Критерии оценивания компетенций	Шкала оценок
Обучающийся не владеет основами учебно-программного материала, обнаружил пробелы в знаниях основного учебно-программного материала, допустил принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой заданий.	«Неудовлетворительно»
Обучающийся владеет знаниями основного учебно-программного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и предстоящей работы по специальности, справился с выполнением заданий, предусмотренных программой, знаком с основной литературой, рекомендованной программой. Как правило, оценка "удовлетворительно" выставляется студентам, допустившим погрешности в ответе на экзамене и при выполнении экзаменационных заданий, но обладающим необходимыми знаниями для их устранения под руководством преподавателя. Оценка «удовлетворительно» выставляется, если студент знает все определения по контрольно-измерительному материалу и может решить хотя бы один практический пример	"Удовлетворительно"
Обучающийся полностью владеет знаниями учебно-программного материала, успешно выполнил предусмотренные в программе задания, усвоил основную литературу, рекомендованную в программе. Как правило, оценка "хорошо" выставляется студентам, показавшим систематический характер знаний по дисциплине и способным к их самостоятельному. Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он правильно и в полном объеме ответил на все теоретические вопросы билета, но допустил погрешности в практических примерах	"Хорошо"
Оценка «отлично» выставляется обучающимся, обнаружившим всестороннее, систематическое и глубокое знание учебно-программного материала, умение свободно выполнять задания, предусмотренные программой, усвоившему основную программу и знакомому с дополнительной литературой, рекомендованной программой. Как правило, оценка "отлично" выставляется студентам, усвоившим взаимосвязь основных понятий дисциплины в их значении для приобретаемой профессии, проявившим творческие способности в понимании, изложении и использовании учебно-программного материала. Оценка «отлично» выставляется, если студент в полном объеме и правильно ответил на все вопросы контрольно-измерительного материала (как на теоретическую, так и на практическую части)	"Отлично"

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

ОПК-1 Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики

Б1.О.19 Уравнения с частными производными (5-6 семестры);

Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа)

!Task1

Пусть $f(x) \in S'(R^n)$, $\varphi(\xi) \in S(R^n)$, $F_{x \rightarrow \xi}[f(x)]$ – обобщенное преобразование Фурье функции $f(x)$, тогда действие $F_{x \rightarrow \xi}[f(x)]$ на $\varphi(\xi)$ определяется по следующей формуле(варианты ответа):

- 1) $(F_{x \rightarrow \xi}[f(x)], \varphi(\xi)) = (f(x), F_{\xi \rightarrow x}[\varphi(\xi)])$,
- 2) $(F_{x \rightarrow \xi}[f(x)], \varphi(\xi)) = (-1)^{|\xi|} (f(x), D^\xi \varphi(\xi))$,
- 3) $(F_{x \rightarrow \xi}[f(x)], \varphi(\xi)) = (D^\xi f(x), \varphi(\xi))$.

Ответ: 1) $(F_{x \rightarrow \xi}[f(x)], \varphi(\xi)) = (f(x), F_{\xi \rightarrow x}[\varphi(\xi)])$,

!Task2

Пусть $f(x) \in S(\mathbb{R}^n)$, тогда преобразование Фурье функции $f(x)$ ($F_{x \rightarrow \xi}[f(x)]$) задается формулой(варианты ответа):

- 1) $\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(x) dx$,
- 2) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cos(x\xi) dx$,
- 3) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \sin(x\xi) dx$, д) $\int_{\mathbb{R}^n} ix f(x) dx$.

Ответ. 1) $\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(x) dx$,

!Task3

Какие начальные условия нужно задать в задаче Коши для уравнения свободных колебаний струны. Выберите правильный ответ.

1. значения функции и ее первой производной по времени в начальный момент времени $t = 0$;
2. значение функции в начальный момент времени $t = 0$
3. значение первой производной функции в начальный момент времени $t = 0$

Ответ 1. значения функции и ее первой производной по времени в начальный момент времени $t = 0$;

!Task4

Какие начальные условия нужно задать в задаче Коши для уравнения теплопроводности. Выберите правильный ответ.

1. значение функции в начальный момент времени $t = 0$
2. значения функции и ее первой производной по времени в начальный момент времени $t = 0$
3. значение первой производной функции в начальный момент времени $t = 0$

Ответ. 1. значение функции в начальный момент времени $t = 0$

!Task5

Функция Хевисайда $\Theta(x)$ задается формулой

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x > 0, \\ 0, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Тогда ее производная $\Theta'(x)$ равна(варианты ответа):

1. $\Theta'(x) = \delta(x)$.
2. $\Theta'(x) = 2\delta(x)$.
3. $\Theta'(x) = 3\delta(x)$.

Ответ. 1. $\Theta'(x) = \delta(x)$.

Задания открытого типа (короткий текст):

!Task6

Вставьте пропущенное слово или закончите определение

Дельта-функция Дирака является обобщенной функцией.

!Ответ
сингулярной
сингулярная

!Task7

Вставьте пропущенное слово или закончите определение

Пусть $L(x, D_x)$ – линейный дифференциальный оператор и выполняется равенство $L(x, D_x)E(x) = \delta(x)$. Тогда функция $E(x) \in S'(R^n)$ называется решением дифференциального оператора $L(x, D_x)$

!Ответ
фундаментальным
фундаментальное

!Task8

Вставьте пропущенное слово или закончите определение

Уравнение и начальные условия

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - a^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_i^2} = f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

определяют начальную задачу для уравнения

!Ответ
волнового
гиперболического

!Task9

Вставьте пропущенное слово или закончите определение

Пусть $f(x) \in D'(R^n)$, тогда функционал $D^\alpha f(x)$ определяемый по формуле

$$(D^\alpha f(x), \varphi(x)) = (-1)^{|\alpha|} (f(x), D^\alpha \varphi(x)), \forall \varphi(x) \in D(R^n)$$

называется производной функции

$$f(x) \in D'(R^n)$$

!Ответ
обобщенной
обобщенная

!Task10

Вставьте пропущенное слово или закончите определение

Уравнение и граничные условия
$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, x \in D, \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} = \varphi(x), x \in \partial D \end{cases}$$

определяют вторую краевую задачу для уравнения

!Ответ
Лапласа
Эллиптического

Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

2) Задания закрытого типа (множественный выбор):

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- 0 баллов — указан хотя бы один неверный ответ.

3) Задания закрытого типа (на соответствие):

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- 0 баллов – хотя бы одно сопоставление определено неверно.

4) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

5) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).